Aufgaben zu Integral der ln-Funktion

1.0 Geben Sie zu folgenden Funktionen jeweils eine Stammfunktion an.

1.1 $f(x)=\frac{1}{x+3}$

1.2 $f(x)=\frac{1}{3x-2}$

1.3 $f(x)=\frac{1}{1-x}$

1.4 $f(x)=\frac{x^2+x-1}{x}$

1.5 $f(x)=\frac{x^2+2x-3}{x^2}$

1.6 $f(x)=\frac{x^2-3x+4}{x+2}$

1.7 $f(x)=\frac{-x^2+3x-2}{2x-1}$

1.8 $f(x)=\frac{2x}{1+x^2}$

1.9 $f(x)=\frac{x}{1-x^2}$

2.0 Berechnen Sie das bestimmte Integral.

2.1 $\int_2^3 \frac{3}{x-1}dx$

2.2 $\int_1^0 \frac{5x^2-x}{x-2}dx$

2.3 $\int_0^1 \frac{x+1}{x^2+2x+1}dx$

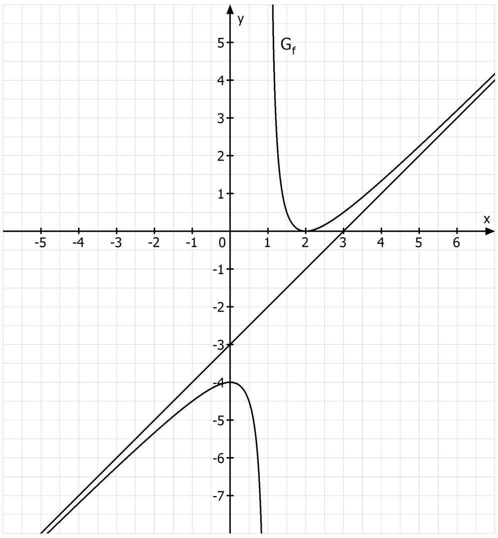
2.4 $\int_{-1}^0 \frac{-e^x}{1+e^x}dx$

3.1 Die Funktionen $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2}$ und $g(x)=-x+2$ schließen mit der Geraden x = k für 0 < k < 1 ein endliches Flächenstück A_k ein (Schnittstelle bei x = 1).
Zeigen Sie, dass für den Flächeninhalt A(k) der Fläche A_k in Abhängigkeit von k gilt:

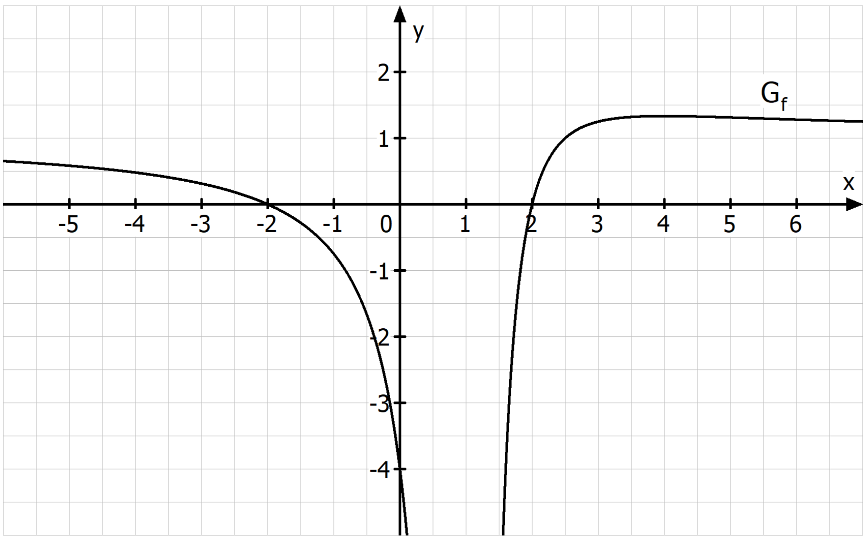
$$A(k)=\frac{k^2+k\cdot\ln(k)+1}{k}-\frac{k^2+3}{2}$$

3.2 Beweisen Sie zunächst, dass gilt: $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ k>0}}\left[k\cdot\ln(k)\right]=0$ gilt. Untersuchen Sie dann, ob der Grenzwert $\lim\limits_{\substack{k\to 0\\ k>0}}A(k)$ existiert und erklären Sie, was Ihr Ergebnis geometrisch bedeutet.

4 Der Graph G_f ($f(x)=\frac{(x-2)^2}{x-1}$) schließt mit der x-Achse, seiner schiefen Asymptote und der Geraden x = 6 ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in folgender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts. (Abitur 2011 AI)

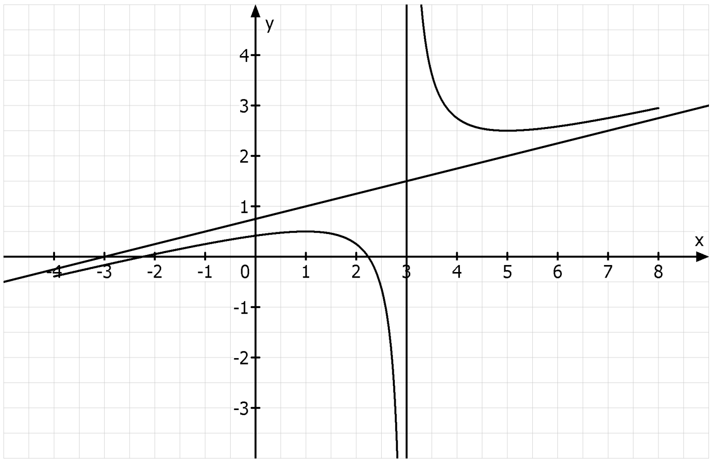


5 Die Funktion $F(x)=x+\ln(x-1)^2+\frac{3}{x-1}$ mit $D_F=\mathbb{R}\setminus\{1\}$ ist eine Stammfunktion von f ($f(x)=\frac{x^2-4}{(x-1)^2}$) (Nachweis nicht erforderlich). G_f und die Koordinatenachsen schließen im III. Quadranten ein Flächenstück ein. Bestimmen Sie die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2011 AII)

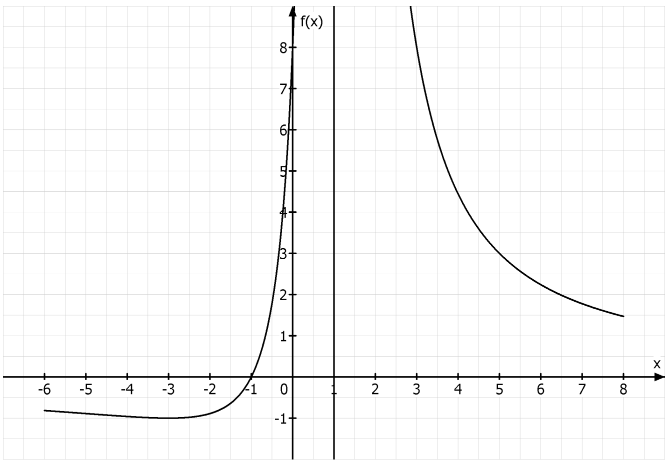


6 Gegeben ist die reelle Funktion $f: x \mapsto \frac{x^2-5}{4\cdot(x-3)}$, die sich auch in der Form

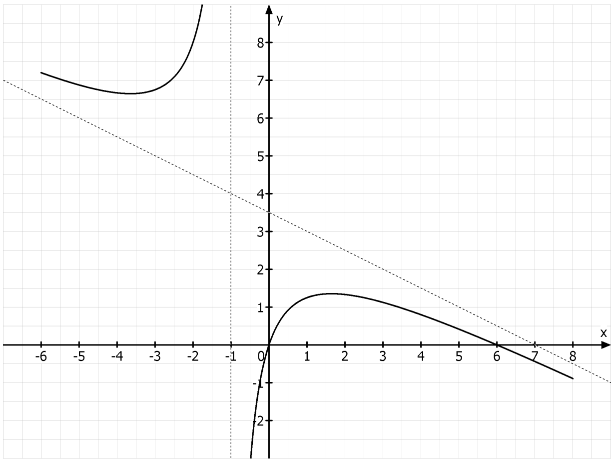
$f(x)=\frac{1}{4}x+\frac{3}{4}+\frac{1}{x-3}$ darstellen lässt. G_f schließt mit der x-Achse ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie das Flächenstück in untenstehendem Schaubild und berechnen Sie die Maßzahl des Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet. (Abitur 2013 AI)



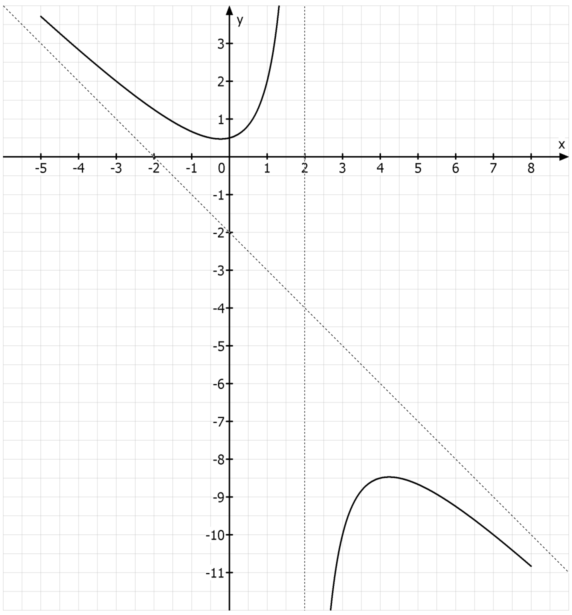
7 Zeigen Sie, dass gilt: $\int\left(\frac{8x+8}{\left(x-1\right)^2}\right)dx = 4\cdot\ln\left(\left(x-1\right)^2\right)-\frac{16}{x-1}+C$ mit $C\in\mathbb{R}$ und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche, die G_g mit den Achsen einschließt.
(Abitur 2013 AII)



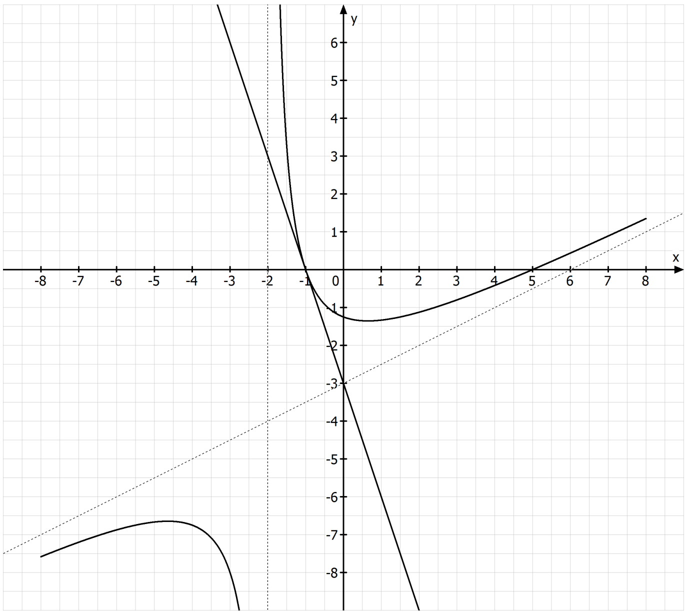
8 Der Graph G_f der Funktion f mit $f(x)=\frac{-0{,}5x^2+3x}{x+1}$, die schiefe Asymptote und die beiden Koordinatenachsen schließen im ersten Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in untenstehender Zeichnung und ermitteln Sie seine Flächenmaßzahl auf zwei Nachkommastellen gerundet. (Abitur 2015 AI)



9 Der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{x^2+1}{2-x}$ und eine Parallele zur x-Achse im Abstand von 2 LE schließen ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in untenstehender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts auf zwei Nachkommastellen gerundet. (Abitur 2015 AII)



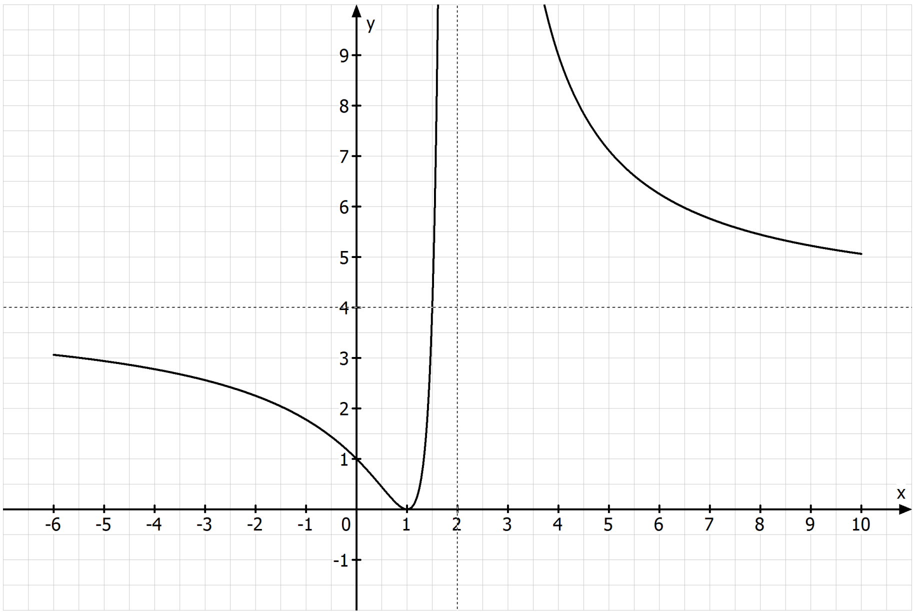
10 Der Graph der Funktion f mit $f(x)=\frac{1}{2}x-3+\frac{7}{2x+4}$ schließt mit der x-Achse ein endliches Flächenstück ein. Schraffieren Sie dieses in der untenstehenden Zeichnung und zeigen Sie, dass die exakte Maßzahl seines Flächeninhalts 12-3,5ln(7) beträgt. (Abitur 2016 AI) ◯



11 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto 4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2}$ mit der maximalen Definitionsmenge $D_f \subset \mathbb{R}$. Ihr Graph heißt G_f.

Zeigen Sie, dass die Funktion F mit $F(x) = 4x + 8 \cdot \ln(2-x) - \frac{4}{x-2}$ in $D_F = \left]-\infty;2\right[$ eine Stammfunktion von f ist.

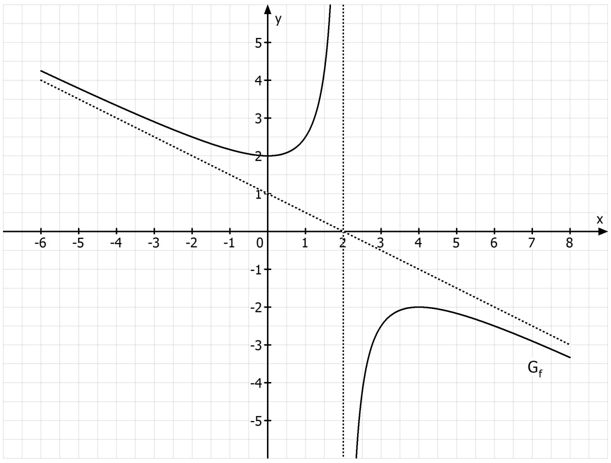
Der Graph G_f schließt mit seiner waagrechten Asymptote und der y-Achse im 1. Quadranten eine endliche Fläche ein. Schraffieren Sie diese Fläche in untenstehender Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl ihres Flächeninhalts. (Abitur 2016 AII)



12.0 Gegeben ist die Funktion f durch $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 8}{-2x + 4}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AI)

12.1 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto -\frac{1}{4}x^2 + x - 2\ln(-2x+4)$ mit der Definitionsmenge $D_F = \left]-\infty;2\right[$ eine Stammfunktion von f ist.

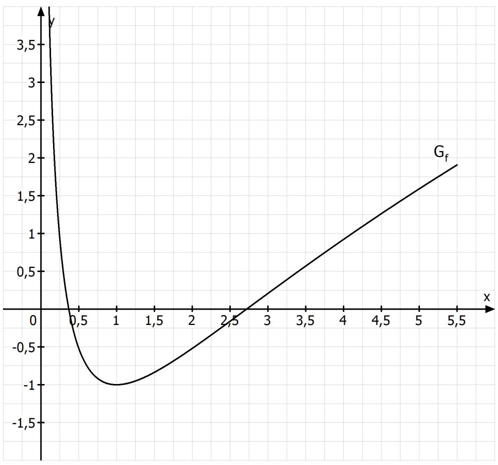
12.2 Der Graph G_f, die Gerade mit der Gleichung x = -6 und die beiden Koordinatenachsen schließen im zweiten Quadranten ein endliches Flächenstück ein.
Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der folgenden Abbildung und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts dieses Flächenstücks auf zwei Nachkommastellen gerundet.



13.0 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto -1+(\ln(x))^2$ mit der Definitionsmenge $D_f =]0;\infty[$.
Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet. (Abitur 2022 AII)

13.1 Zeigen Sie, dass die Funktion $F: x \mapsto x\cdot(\ln(x)-1)^2$ mit der Definitionsmenge $D_F =]0;\infty[$ eine Stammfunktion von f ist.

13.2 Der Graph G_f und die x-Achse schließen im vierten Quadranten ein endliches Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück in der untenstehenden Zeichnung und berechnen Sie die Maßzahl des Inhalts der Fläche auf zwei Nachkommastellen gerundet.

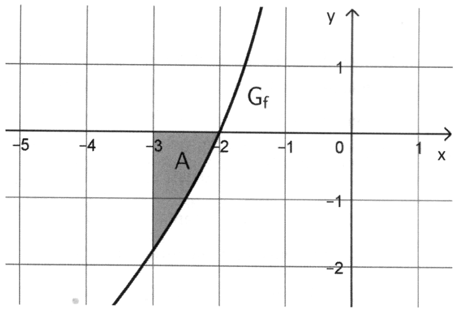


Jochen Weber

14 Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2}$ mit ihrer maximalen Definitionsmenge $D_f=\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

Die Abbildung zeigt ein endliches Flächenstück A, das unter anderem von G_f begrenzt wird. Berechnen Sie die Maßzahl seines Flächeninhalts. (Abitur 2024 AII)

Hinweis: Die ganzzahligen Grenzen des Flächenstücks dürfen der Abbildung entnommen werden.



15 Gegeben ist die Funktion $f: x \mapsto \frac{-x^2-5}{x^3-5x}$ mit ihrer Definitionsmenge $D_f = IR\setminus\{-\sqrt{5};0;\sqrt{5}\}$. Der Graph der Funktion f wird mit G_f bezeichnet.

Zeigen Sie, dass die Funktion f auch durch die Gleichung $f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-5}$ dargestellt werden kann und berechnen Sie das bestimmte Integral $\int_1^2 f(x)dx$ exakt.

(Abitur 2025 AII)

Lösungen

1.1 $F(x)=\ln|x+3|+C$

1.2 $F(x)=\ln|3x-2|\cdot\frac{1}{3}+C$

1.3 $F(x)=\ln|1-x|\cdot(-1)+C$

1.4 $f(x)=x+1-\frac{1}{x}\quad\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2+x-\ln|x|+C$

1.5 $f(x)=1+\frac{2}{x}-\frac{3}{x^2}\quad\Rightarrow F(x)=x+2\ln|x|+\frac{3}{x}+C$

1.6 $f(x)=x-5+\frac{14}{x+2}\quad\Rightarrow F(x)=\frac{1}{2}x^2-5x+14\cdot\ln|x+2|+C$

1.7 $f(x)=-0{,}5x+1{,}25+\frac{-0{,}75}{2x-1}\quad\Rightarrow F(x)=-0{,}25x^2+1{,}25x-\frac{3}{8}\cdot\ln|2x-1|+C$

1.8 $F(x)=\ln|1+x^2|+C$

1.9 $F(x)=-\frac{1}{2}\cdot\ln|1-x^2|+C$

2.1 $\left[3\cdot\ln|x-1|\right]_2^3=3\ln2-3\ln1=3\ln2\approx2{,}08$

2.2

$$\int_1^0\frac{5x^2-x}{x-2}dx=\int_1^0(5x+9+\frac{18}{x-2})dx=\left[2{,}5x^2+9x+18\cdot\ln|x-2|\right]_1^0=$$

$$(18\cdot\ln2)-(2{,}5+9+18\cdot\ln1)=18\ln2-11{,}5\approx0{,}98$$

2.3 $\left[\frac{1}{2}\cdot\ln|x^2+2x+1|\right]_0^1=\frac{1}{2}\cdot\ln4-\frac{1}{2}\cdot\ln1=\frac{1}{2}\cdot\ln4\approx0{,}69$

2.4 $\left[-\ln|1+e^x|\right]_{-1}^0=(-\ln2)-(-\ln(1+e^{-1}))=-\ln2+\ln(1+e^{-1})=\ln\frac{1+e^{-1}}{2}\approx-0{,}38$

3.1

$$A(k)=\int_k^1(f(x)-g(x))dx=\int_k^1\left(\frac{x^2-x+1}{x^2}-(-x+2)\right)dx=$$

$$=\int_k^1\left(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x-2\right)dx=\int_k^1\left(-1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}+x\right)dx=$$

$$=\left[-x-\ln|x|-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2\right]_k^1=-1{,}5+k+\ln k+\frac{1}{k}-\frac{1}{2}k^2=\frac{k^2+k\cdot\ln k+1}{k}-\frac{k^2+3}{2}$$

3.2

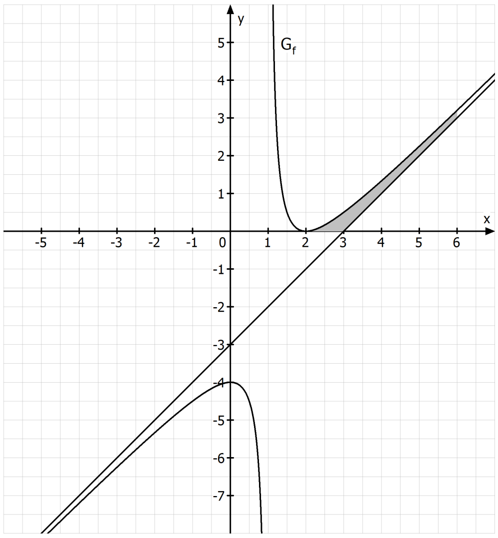
$$\lim_{k \overset{>}{\to} 0} \left[k \cdot \ln k \right] = 0$$ (Potenzfunktion dominiert über ln-Funktion)

$$\lim_{k \overset{>}{\to} 0} \left(\frac{k^2 + k \cdot \ln k + 1}{k} - \frac{k^2 + 3}{2} \right)$$ existiert nicht

$A(k) \to +\infty$ für $k \overset{>}{\to} 0$

Die Fläche zwischen dem Graph G_f und dem Graph G_g, die sich für $k \overset{>}{\to} 0$ nach oben ins Unendliche erstreckt, ist unendlich.

4



$$(x^2 - 4x + 4) : (x - 1) = x - 3 + \frac{1}{x-1}$$

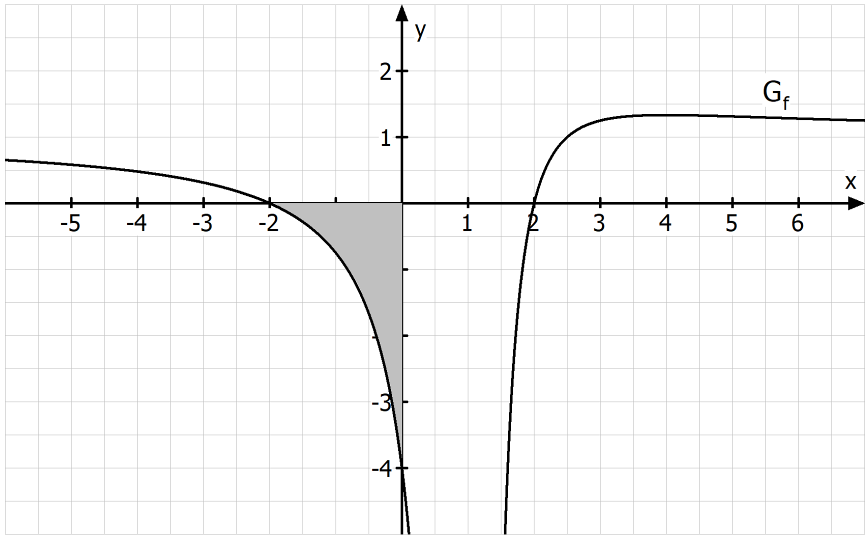
$$A_1 = \int_2^6 \left[f(x) - (x-3) \right] dx = \int_2^6 \frac{1}{x-1} dx = \left[\ln|x-1| \right]_2^6 = \ln 5 - \ln 1 = \ln 5$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

(Dreieck unterhalb der x-Achse, das die schiefe Asymptote mit der x-Achse einschließt)

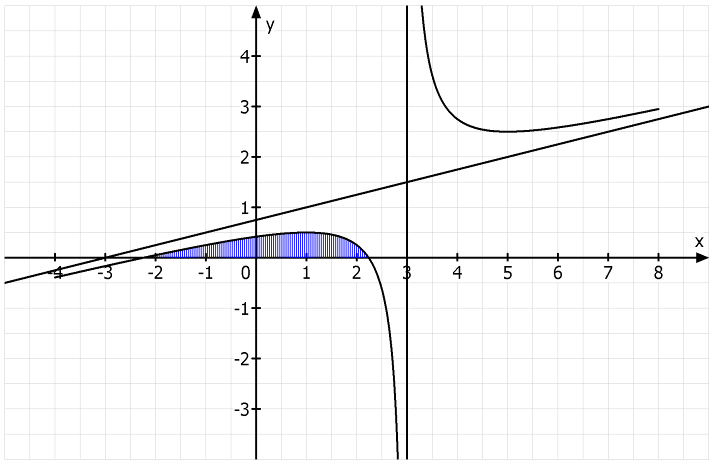
$$\Rightarrow A = \ln 5 - 0{,}5 \approx 1{,}11$$

5



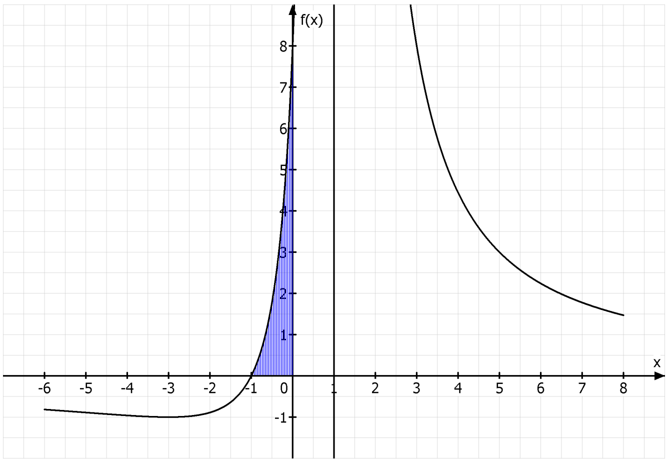
$$A = -\int_{-2}^{0} f(x)dx = -\left[x+\ln(x-1)^2+\frac{3}{x-1}\right]_{-2}^{0} =$$
$$= -\big((-3)-(-2+\ln(9)-1)\big) = \ln(9)$$

6



$$A = \int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(0,25x+0,75+\frac{1}{x-3}\right)dx = \left[0,125x^2+0,75x+\ln|x-3|\right]_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} =$$
$$= \left(0,125\cdot 5+0,75\cdot\sqrt{5}+\ln\left|\sqrt{5}-3\right|\right)-\left(0,125\cdot 5+0,75\cdot(-\sqrt{5})+\ln\left|-\sqrt{5}-3\right|\right) =$$
$$= 1,5\sqrt{5}+\ln\left|\sqrt{5}-3\right|-\ln\left|-\sqrt{5}-3\right| \approx 1,43$$

7



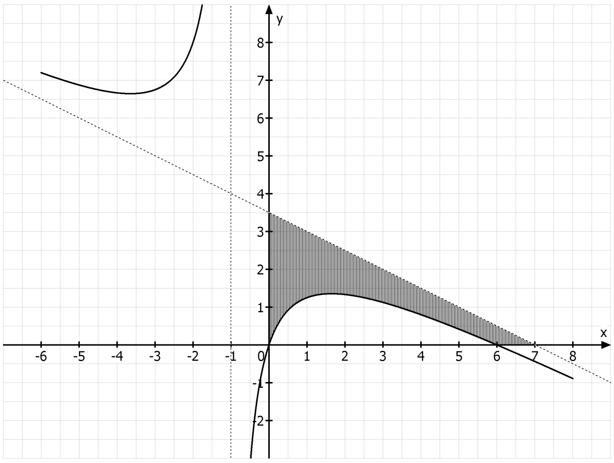
$$G'(x) = 4 \cdot \frac{1}{(x-1)^2} \cdot 2(x-1) + \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{8(x-1)}{(x-1)^2} + \frac{16}{(x-1)^2} = \frac{8x+8}{(x-1)^2} = g(x)$$

$\Rightarrow$ G ist Stammfunktion von g;

$$A = \int_{-1}^{0} g(x)dx = \left[4 \cdot \ln\left(\left(x-1\right)^2\right) - \frac{16}{x-1}\right]_{-1}^{0} = \left(4\ln(1)+16\right) - \left(4\ln(4)+8\right) =$$

$$= 16 - 4\ln 4 - 8 = 8 - 4\ln 4 \approx 2,45$$

8



$$A=\int_0^6\left[\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)-f(x)\right]dx+\int_6^7\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)dx=$$

$$=\int_0^6\left[\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)-\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5-\frac{3{,}5}{x+1}\right)\right]dx+\int_6^7\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)dx=$$

$$=\int_0^6\left(\frac{3{,}5}{x+1}\right)dx+\int_6^7\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)dx=$$

$$=\left[3{,}5\ln|x+1|\right]_0^6+\left[-\frac{1}{4}x^2+3{,}5x\right]_6^7=(3{,}5\ln7-3{,}5\ln1)+(12{,}25-12)=$$

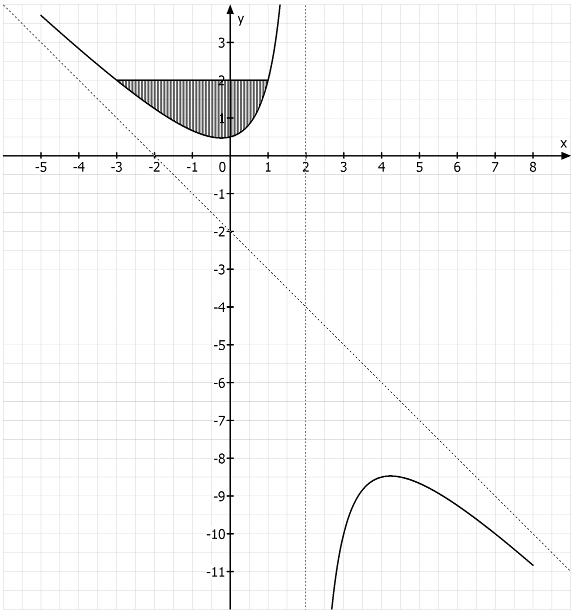
$$=3{,}5\ln7+0{,}25\approx7{,}06$$

Alternativen:

1) $A=\int_0^6\left[\left(-\frac{1}{2}x+3{,}5\right)-f(x)\right]dx+A_{\Delta_{\text{klein}}}$

2) $A=A_{\Delta_{\text{groß}}}-\int_0^6 f(x)dx$

9



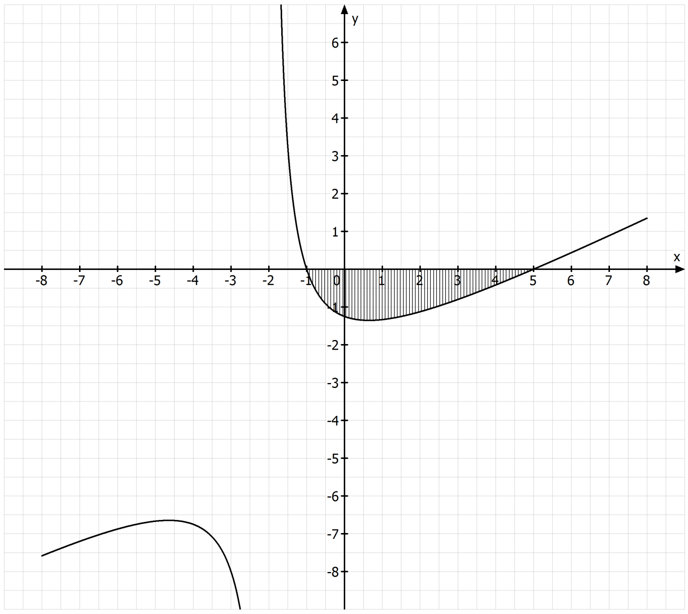
$$\frac{x^2+1}{2-x}=2 \Rightarrow x^2+1=4-2x \Rightarrow x^2+2x-3=0$$

$$\Rightarrow (x+3)(x-1)=0 \Rightarrow x_1=-3 \quad x_2=1$$

$$A=\int_{-3}^{1}\left(2-f(x)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(2-\left(-x-2-\frac{5}{2-x}\right)\right)dx=\int_{-3}^{1}\left(x+4-\frac{5}{2-x}\right)dx=$$

$$=\left[\frac{1}{2}x^2+4x+5\ln\left|2-x\right|\right]_{-3}^{1}=4{,}5+\ln 1-(-7{,}5+5\ln 5)=12-5\ln 5\approx 3{,}95$$

10

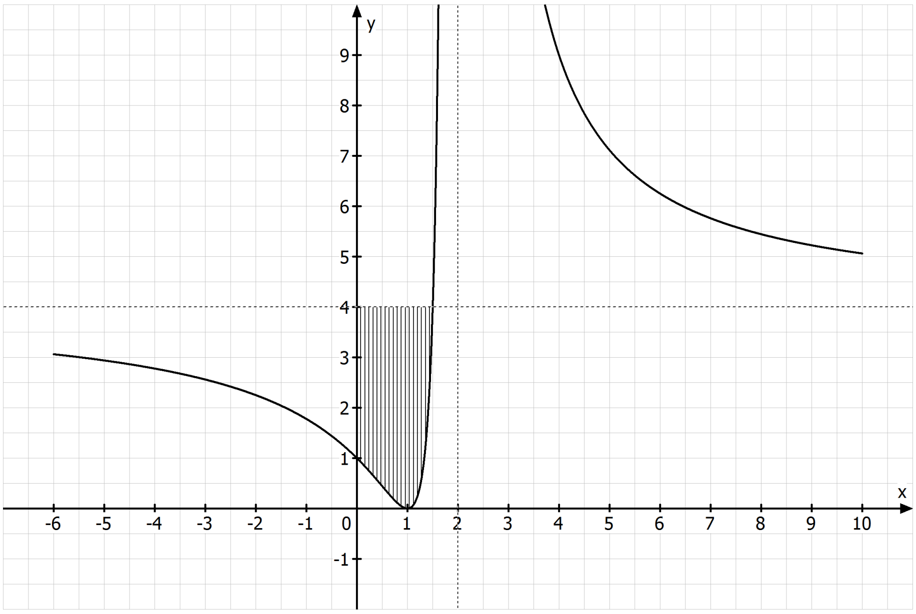


$$A = -\int_{-1}^{5}\left(\frac{1}{2}x - 3 + \frac{7}{2x+4}\right)dx = -\left[\frac{1}{4}x^2 - 3x + 3{,}5\cdot\ln|2x+4|\right]_{-1}^{5} =$$

$$= -\Big[\big(-8{,}75 + 3{,}5\cdot\ln(14)\big) - \big(3{,}25 + 3{,}5\cdot\ln(2)\big)\Big] = 8{,}75 - 3{,}5\cdot\ln(14) + 3{,}25 + 3{,}5\cdot\ln(2) =$$

$$= 12 - 3{,}5\big(\ln(14) - \ln(2)\big) = 12 - 3{,}5\cdot\ln(7)$$

11



$$F'(x) = 4 + 8 \cdot \frac{1}{2-x} \cdot (-1) - \frac{0 \cdot (x-2) - 4 \cdot 1}{(x-2)^2} = 4 + \frac{8}{x-2} + \frac{4}{(x-2)^2} =$$

$$= 4 + \frac{8(x-2)+4}{(x-2)^2} = 4 + \frac{8x-12}{(x-2)^2} = f(x)$$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f

$$A = \int_0^{1,5} \left(4 - f(x)\right) dx = \left[4x - \left(4x + 8 \cdot \ln(2-x) - \frac{4}{x-2} \right) \right]_0^{1,5} =$$

$$= \left[-8 \cdot \ln(2-x) + \frac{4}{x-2} \right]_0^{1,5} = \left(-8\ln(0,5) - 8\right) - \left(-8\ln(2) - 2\right) \approx 5,09$$

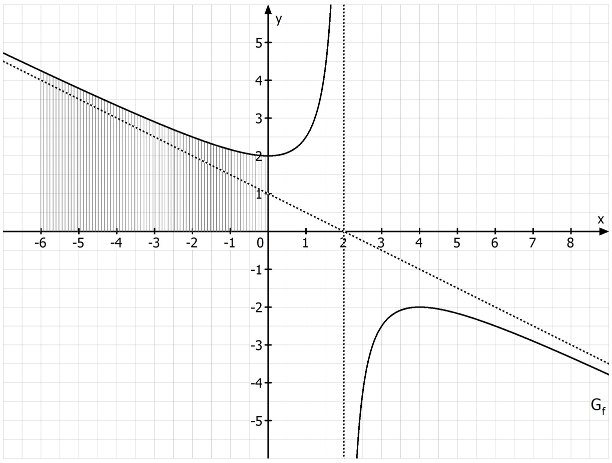
12.1

$$F'(x) = -\frac{1}{4}x^2 + x - 2 \cdot \frac{1}{-2x+4} \cdot \left(-2\right) = -\frac{1}{4}x^2 + x + \frac{4}{-2x+4} = f(x)$$

$$-2x + 4 > 0 \quad \Rightarrow x < 2 \quad \Rightarrow D_F = \left]-\infty; 2\right[$$

$\Rightarrow$ F ist in $D_F = \left]-\infty; 2\right[$ Stammfunktion von f

12.2



$$A=\int_{-6}^{0} f(x)dx=\left[-\frac{1}{4}x^2+x-2\ln\left(-2x+4\right)\right]_{-6}^{0}=$$

$$=-2\ln\left(4\right)-\left(-9-6-2\ln(16)\right)=15-2\ln(4)+2\ln(16)\approx 17{,}77$$

13.1

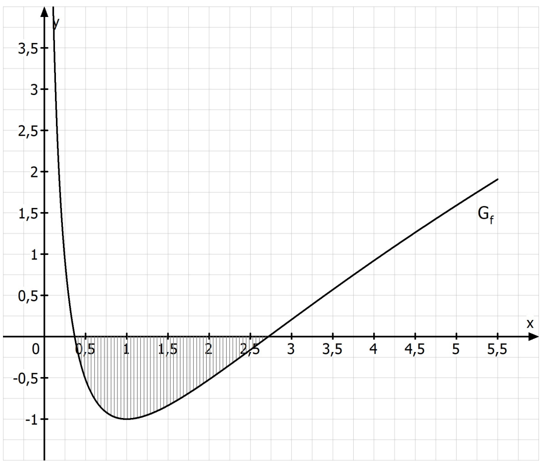
$$F'(x)=1\cdot\left(\ln(x)-1\right)^2+x\cdot 2\cdot\left(\ln(x)-1\right)\cdot\frac{1}{x}=\left(\ln(x)-1\right)^2+2\cdot\left(\ln(x)-1\right)=$$

$$=\left(\ln(x)\right)^2-2\cdot\ln(x)+1+2\cdot\ln(x)-2=\left(\ln(x)\right)^2-1=f(x)$$

Definitionsmenge von F: $x>0 \quad \Rightarrow D_F=\left]0;\infty\right[$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f

13.2



$$\int_{\frac{1}{e}}^{e} f(x)dx=\left[x\cdot\left(\ln(x)-1\right)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}=\left(e\cdot 0\right)-\left(\frac{1}{e}\cdot 4\right)=-\frac{4}{e}$$

$$\Rightarrow A=\frac{4}{e}\approx 1{,}47$$

14

$$f(x)=\frac{x^3-3x+2}{x^2}=\frac{x^3}{x^2}-\frac{3x}{x^2}+\frac{2}{x^2}=x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}$$

$$\int_{-3}^{-2}\left(x-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[\frac{1}{2}x^2-3\ln|x|-\frac{2}{x}\right]_{-3}^{-2}=$$

$$=\left(\frac{1}{2}(-2)^2-3\ln|-2|-\frac{2}{-2}\right)-\left(\frac{1}{2}(-3)^2-3\ln|-3|-\frac{2}{-3}\right)=$$

$$=(4-3\ln(2)+1)-\left(4{,}5-3\ln(3)+\frac{2}{3}\right)=3-3\ln(2)-\frac{31}{6}+3\ln(3)=$$

$$=-\frac{13}{6}-3\ln(2)+3\ln(3)\approx-0{,}95$$

$$\Rightarrow A=|-0{,}95|=0{,}95$$

15

$$f(x)=\frac{1}{x}-\frac{2x}{x^2-5}=\frac{x^2-5-2x\cdot x}{x(x^2-5)}=\frac{-x^2-5}{x^3-5x}$$

$$\int_1^2 f(x)dx=\left[\ln|x|-\ln|x^2-5|\right]_1^2=(\ln(2)-\ln(1))-(\ln(1)-\ln(4))=$$

$$=\ln(2)+\ln(4)=\ln(8)$$